Soal dan Pembahasan
OSN Matematika 2022
Jenjang SMA/MA Sederajat

Hari Kedua

Wildan Bagus Wicaksono

Moh. Yasya Bahrul Ulum S.T., M.T.

Soal

OSN Matematika SMA/MA Sederajat 2022

Hari Kedua

240 menit

Soal 5. Diberikan bilangan asli $N \geq 2$ dan bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ sehingga untuk setiap indeks $1 \leq i \leq j \leq N+1$ berlaku

$$a_i a_{i+1} \cdots a_j \not\equiv 1 \pmod{N}.$$

Buktikan bahwa terdapat indeks i sehingga $\gcd(a_i, N) \neq 1$.

Catatan. $\gcd(a, b)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari bilangan bulat a dan b.

Soal 6. Pada segitiga ABC, titik D dan E berada pada sisi AB dan AC berturut-turut sehingga DE sejajar BC. Diketahui terdapat titik P pada interior segiempat $BDEC$ sehingga $\angle BPD = \angle CPE = 90^\circ$. Buktikan bahwa garis AP melalui titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga EPD dan BPC.

Soal 7. Misalkan A adalah suatu barisan bilangan nol dan satu. Barisan tersebut dapat diubah dengan melakukan operasi berikut: kita boleh memilih suatu blok atau sub-barisan bersambung (*contiguous subsequence*) di mana terdapat nol dan satu yang **tidak** sama banyaknya, dan membalik urutan bilangan di dalam blok tersebut (blok $a_1, a_2, \cdots, a_r$ menjadi $a_r, a_{r-1}, \cdots, a_1$).

Sebagai contoh, misalkan A adalah barisan $1, 1, 0, 0, 1$. Kita boleh memilih $1, 0, 0$ dan membaliknya, sehingga barisan $1, \boxed{1, 0, 0}, 1$ berubah menjadi $1, \boxed{0, 0, 1}, 1$. Namun, kita tidak boleh memilih blok $1, 1, 0, 0$ dan membalik urutannya karena mengandung 1 dan 0 yang sama banyaknya. Dua barisan A dan B dikatakan berkerabat jika A dapat diubah menjadi B melalui sejumlah hingga operas-operasi di atas.

Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga terdapat n barisan berbeda $A_1, A_2, \cdots, A_n$ di mana setiap barisan terdiri dari 2022 bilangan dan untuk setiap indeks $i \neq j$, barisan A_i tidak berkerabat A_j.

Soal 8. Tentukan bilangan riil positif K terkecil sehingga ketaksamaan

$$K + \frac{a+b+c}{3} \geq (K+1)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

berlaku untuk setiap bilangan riil $0 \leq a, b, c \leq 1$.

Soal dan Solusi

Problem 5

Diberikan bilangan asli $N \geq 2$ dan bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_{N+1}$ sehingga untuk setiap indeks $1 \leq i \leq j \leq N+1$ berlaku

$$a_i a_{i+1} \cdots a_j \not\equiv 1 \pmod{N}.$$

Buktikan bahwa terdapat indeks i sehingga $\gcd(a_i, N) \neq 1$.

Catatan. $\gcd(a, b)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari bilangan bulat a dan b.

Andaikan untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq N$ berlaku $\gcd(a_i, N) = 1$. Perhatikan banyaknya bilangan yang kurang dari N dan saling prima dengan N ada sebanyak $\varphi(N) < N$. Maka dengan Pigeon Hole Principle, dari $N+1$ bilangan berikut

$$a_1, \quad a_1a_2, \quad a_1a_2a_3, \quad \cdots, \quad a_1a_2a_3\cdots a_{N+1}$$

terdapat indeks $1 \leq i < j \leq N+1$ sedemikian sehingga

$$a_1a_2\cdots a_i \equiv a_1a_2\cdots a_j \pmod{N}.$$

Dari asumsi awal, untuk sebarang $1 \leq i \leq j \leq N+1$ punya $\gcd\left(a_ia_{i+1}\cdots a_j, n\right) = 1$ sehingga diperoleh

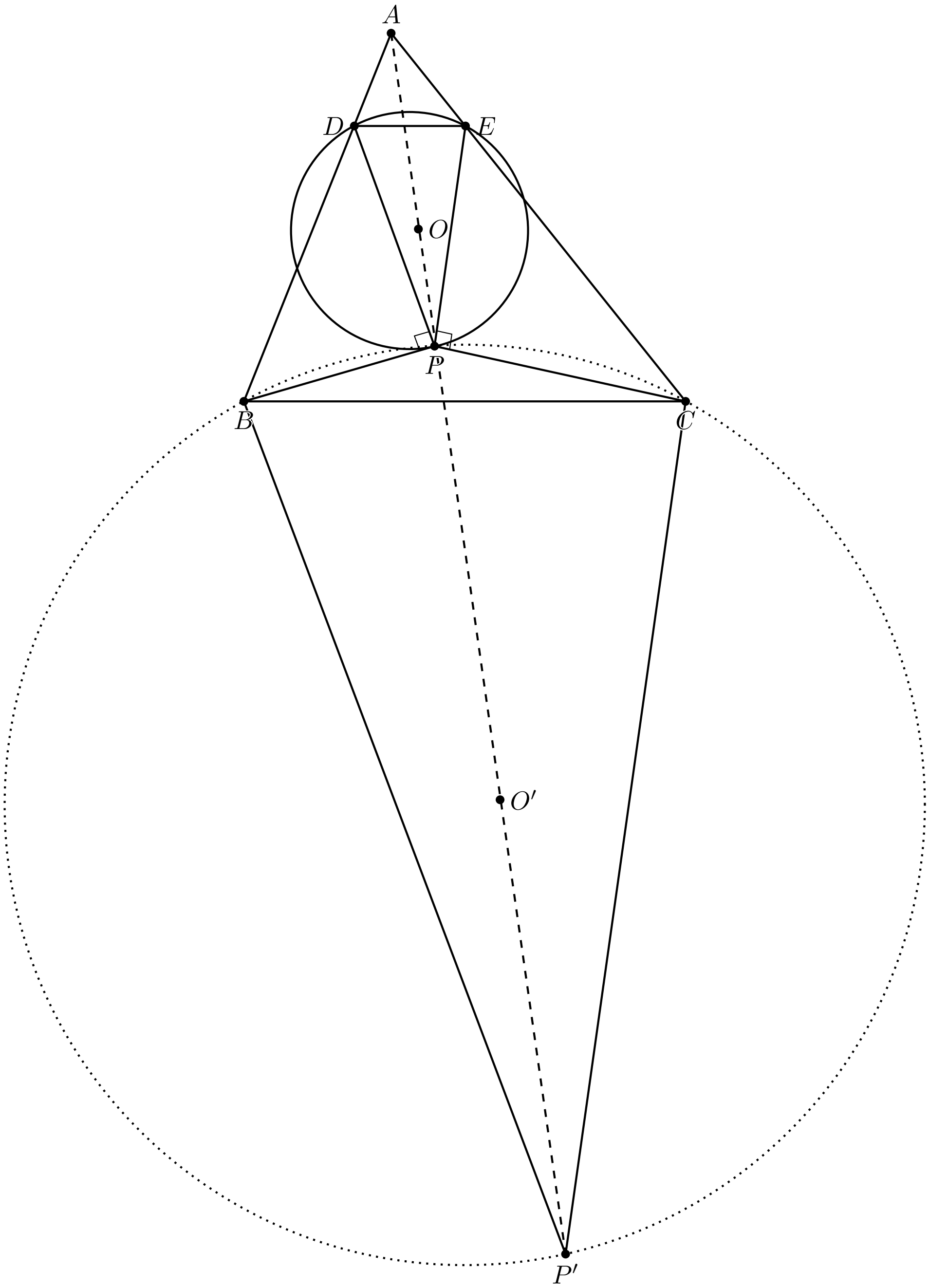
$$0 \equiv a_1a_2\cdots a_j - a_1a_2\cdots a_i \equiv a_1a_2\cdots a_i\left(a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j - 1\right) \pmod{n} \iff a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j \equiv 0 \pmod{n},$$

kontradiksi. Jadi, terbukti bahwa terdapat indeks i sedemikian sehingga $\gcd(a_i, N) \neq 1$. ■

Problem 6

Pada segitiga ABC, titik D dan E berada pada sisi AB dan AC berturut-turut sehingga DE sejajar BC. Diketahui terdapat titik P pada interior segiempat $BDEC$ sehingga $\angle BPD = \angle CPE = 90^\circ$. Buktikan bahwa garis AP melalui titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga EPD dan BPC.

Dengan pusat A dan skala r, perhatikan bahwa homothety $h(A, r) : DE \mapsto BC$. Kemudian, konstruksi suatu titik P' sedemikian sehingga $h(A, r) : \triangle DPE \mapsto \triangle BP'C$. Kita punya A, P, P' segaris. Misalkan O dan O' berturut-turut adalah pusat $\odot(DPE)$ dan $\odot(BP'C)$. Sehingga kita punya juga $h(A, r) : O \mapsto O'$ yang berarti A, O, O' segaris.



Lemma. $BPCP'$ siklis.

Bukti. Mengingat $h(A, r) : \triangle DPE \mapsto \triangle BP'C$, maka $\angle DPE = \angle BP'C$. Kita punya

$$\angle BPC + \angle BP'C = 180^\circ - \angle DPE + \angle DPE = 180^\circ$$

sehingga $BPCP'$ siklis. □

Artinya, O' adalah titik pusat $\odot(BPC)$ sehingga sekarang ekivalen dengan membuktikan bahwa P, O', P' segaris, jika dan hanya jika PP' diameter $\odot(BPCP')$. Perhatikan bahwa $\angle DEP = \angle BCP'$ sehingga kita punya

$$\begin{aligned}
\angle PCP' &= \angle PCB + \angle BCP' \\
&= \angle ECB - \angle ECP + \angle DEP \\
&= 180^\circ - \angle DEC - \angle ECP + \angle DEP \\
&= 180^\circ - \angle DEP - \angle PEC - \angle ECP + \angle DEP \\
&= 90^\circ
\end{aligned}$$

yang membuktikan PP' diameter. Jadi, terbukti bahwa AP melalui titik pusat $\odot(DPE)$ dan $\odot(BPC)$. ■

Solusi Alternatif. Konfigurasi yang digunakan mirip dengan solusi pertama. Misalkan garis yang melewati B dan tegak lurus dengan BP memotong garis yang melewati C dan tegak lurus dengan CP di titik P'. Karena $DP \perp BP$ dan $CP \perp EP$ maka $DP \parallel BP'$ dan $EP \parallel CP'$. Maka $\triangle PDE$ homothety dengan $\triangle P'BC$ dengan pusat homothety adalah perpotongan BD dan CE yaitu titik A. Dari sifat homoteti didapatkan A, P, P' segaris. Karena $\angle PBP' = \angle PCP' = 90^\circ$ maka B, P, C, P' siklis dengan PP' diameter. Dengan A, P, P' segaris maka terbukti AP melewati pusat lingkaran luar $\triangle BPC$ dan $\triangle BP'C$. Dengan pusat homoteti $\triangle PDE$ dan $\triangle BP'C$ di titik A maka terbukti AP juga melewati pusat lingkaran luar $\triangle PDE$. ■

Problem 7

Misalkan A adalah suatu barisan bilangan nol dan satu. Barisan tersebut dapat diubah dengan melakukan operasi berikut: kita boleh memilih suatu blok atau sub-barisan bersambung (*contiguous subsequence*) di mana terdapat nol dan satu yang **tidak** sama banyaknya, dan membalik urutan bilangan di dalam blok tersebut (blok $a_1, a_2, \cdots, a_r$ menjadi $a_r, a_{r-1}, \cdots, a_1$).
Sebagai contoh, misalkan A adalah barisan $1, 1, 0, 0, 1$. Kita boleh memilih $1, 0, 0$ dan membaliknya, sehingga barisan $1, \boxed{1, 0, 0}, 1$ berubah menjadi $1, \boxed{0, 0, 1}, 1$. Namun, kita tidak boleh memilih blok $1, 1, 0, 0$ dan membalik urutannya karena mengandung 1 dan 0 yang sama banyaknya. Dua barisan A dan B dikatakan berkerabat jika A dapat diubah menjadi B melalui sejumlah hingga operas-operasi di atas.
Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga terdapat n barisan berbeda $A_1, A_2, \cdots, A_n$ di mana setiap barisan terdiri dari 2022 bilangan dan untuk setiap indeks $i \neq j$, barisan A_i tidak berkerabat A_j.

Jawabannya adalah 2025.
Perhatikan setiap melakukan operasi, banyak bilangan 1 dan bilangan 0 masing-masing tidak berubah. Sedemikian sehingga apabila A dan B barisan dengan panjang yang sama dan memiliki banyak bilangan 1 (dan tentunya bilangan 0) berbeda maka A dan B tidak berkerabat.
Misalkan $A = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ adalah barisan dengan panjang k dan misalkan $P(A, l, r)$ adalah barisan yang dibentuk dengan membalikkan sub-barisan bersambung $a_l, a_{l+1}, \cdots, a_r$ menjadi $a_r, a_{r-1}, \cdots, a_l$ dari barisan A.
Karena $a_l, a_{l+1}, \cdots, a_r$ apabila dibalik dua kali tetap menjadi $a_l, a_{l+1}, \cdots, a_r$ maka $P(P(A, l, r), l, r) = A$. Sedemikian sehingga apabila A dapat diubah menjadi B melalui operasi

$$P(A_0, l_1, r_1) = A_1, \quad P(A_1, l_2, r_2) = A_2, \quad \cdots, \quad P(A_{k-1}, l_k, r_k) = A_k$$

secara berurutan di mana $A_0 = A$ dan $A_k = B$. Maka B dapat diubah kembali menjadi A dengan operasi

$$P(A_k, l_k, r_k) = A_{k-1}, \quad P(A_{k-1}, l_{k-1}, r_{k-1}) = A_{k-2}, \quad \cdots, \quad P(A_1, l_1, r_1) = A_0$$

secara berurutan.
Perhatikan pada barisan $A = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ apabila ada i sehingga $a_i = a_{i+1} \neq a_{i+2}$ maka ada operasi $P(A, i, i+2) \neq A$. Begitu juga apabila ada i sehingga $a_i \neq a_{i+1} = a_{i+2}$.
Lemma. $A = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ *dengan* m *buah angka* 1 *yang tidak berbentuk* $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$ *ataupun* $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$ *akan berkerabat dengan* $B = (1, 1, 1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0)$ *yang memiliki* m *buah angka* 1.
Bukti. Definisikan **mengubah** A atau sub-barisan bersambungnya adalah melakukan beberapa operasi terhadap A dan mengembalikan ke nama yang sama. Apabila memuat sub-barisan bersambung $(0, 1, 1)$ ubahlah menjadi $(1, 1, 0)$. Apabila memuat sub-barisan bersambung $(0, 0, 1)$ gunakan operasi sehingga berubah menjadi $(1, 0, 0)$. Lakukan terus menerus sehingga tidak bisa lagi maka barisan berbentuk

$$(1, 1, 1 \cdots, 1, 1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, 0, 0, \cdots, 0).$$

Perhatikan pada sub-barisan bersambung $(1, 1, 0, 1)$ bisa diubah menjadi $(0, 1, 1, 1)$ kemudian menjadi $(1, 1, 1, 0)$. Atau pada sub-barisan bersambung $(0, 1, 0, 0)$ menjadi $(0, 0, 0, 1)$ kemudian menjadi $(1, 0, 0, 0)$. Sehingga apabila dilakukan dua langkah tersebut terus menerus bisa didapatkan

$$(1, 1, 1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots, 0).$$

$\square$

Perhatikan pada barisan $A = (0, 1, 0, 1, \cdots)$ tidak ada operasi dengan banyak angka 0 dan 1 berbeda sehingga $P(A, l, r) \neq A$. Begitu juga $A = (1, 0, 1, 0, \cdots)$. Maka barisan-barisan yang saling tidak berkerabat maksimal yang dibentuk adalah memiliki banyak bilangan 1 berbeda-beda yaitu $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ ada 0 bilangan 1, $(1, 0, 0, \cdots, 0)$ ada 1 bilangan 1, $(1, 1, 0, \cdots, 0)$ ada 2 bilangan 1, dan seterusnya hingga $(1, 1, 1, \cdots, 1)$ ada 2022 bilangan 1. Ada 2023 barisan ditambah 2 barisan berbentuk $(1, 0, 1, 0, \cdots)$ dan $(0, 1, 0, 1, \cdots)$ sehingga total ada $\boxed{2025}$.

Problem 8

Tentukan bilangan riil positif K terkecil sehingga ketaksamaan

$$K+\frac{a+b+c}{3}\geq (K+1)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

berlaku untuk setiap bilangan riil $0\leq a,b,c\leq 1$.

Jawabannya adalah $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Misalkan

$$f(a,b,c)=K+\frac{a+b+c}{3}-(K+1)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Tetapkan nilai b,c dan sebarang $a\in[0,1]$. Tinjau

$$g(a)=K+\frac{a+b+c}{3}-(K+1)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \implies g''(a)=-\frac{(K+1)\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^{3/2}}\leq 0$$

yang artinya g merupakan fungsi konkaf di a. Secara analog, g juga konkaf di b dan c. Mengingat $a,b,$ dan c bersifat independen, nilai $f(a,b,c)$ akan bernilai minimum jika (a,b,c) dipilih dari $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0)$ dan permutasinya.

- Untuk $(a,b,c)=(1,1,1)$, maka
$$f(a,b,c)=K+1-(K+1)\sqrt{1}=0.$$
- Untuk $(a,b,c)=(1,1,0)$ dan permutasinya, maka
$$f(a,b,c)=K+\frac{2}{3}-(K+1)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$
- Untuk $(a,b,c)=(1,0,0)$ dan permutasinya, maka
$$f(a,b,c)=K+\frac{1}{3}-\frac{K+1}{\sqrt{3}}.$$
- Untuk $(a,b,c)=(0,0,0)$, maka
$$f(a,b,c)=K+0-(K+1)\sqrt{0}=K.$$

Jadi,

$$\min f(a,b,c)=\min\left\{0,K+\frac{2}{3}-(K+1)\sqrt{\frac{2}{3}},K+\frac{1}{3}-\frac{K+1}{\sqrt{3}},K\right\}.$$

Agar terpenuhi syarat $f(a,b,c)\geq 0$ untuk setiap $a,b,c\in[0,1]$, haruslah kedua syarat berikut

$$K+\frac{2}{3}-(K+1)\sqrt{\frac{2}{3}}\geq 0 \quad \text{dan} \quad K+\frac{1}{3}-\frac{K+1}{\sqrt{3}}\geq 0$$

dapat terpenuhi sekaligus. Selesaikan masing-masing memberikan $K\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$ dan $K\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $K\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$. Jadi, nilai terkecil dari K adalah $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(a,b,c)=(1,1,0),(1,1,1)$ dan permutasinya.

> **Remark.** Ide dasar dari solusi di atas menggunakan fakta pada fungsi konkaf (dapat melihat dari bentuk grafik fungsi konkaf). Jika $f(x)$ konkaf di interval $[a,b]$, maka f bernilai minimum di $f(a)$ atau $f(b)$.

Solusi Alternatif. (Sulthan Fulviano S. M. P.) Untuk $(a,b,c)=(1,1,0)$ dan permutasinya diperoleh $K\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$. Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{a+b+c}{3}\geq\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

untuk setiap bilangan riil $a,b,c\in[0,1]$.

Lemma. *Untuk setiap $a,b,c\in[0,1]$ berlaku*

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2a^2+2b^2+2c^2\leq 6.$$

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $a,b\in[0,1]$ berlaku $(a-1)(b-1)\geq 0$ dan $a^2\leq a$. Maka

$$0\leq(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)=ab+bc+ca-2a-2b-2c+3$$

sehingga diperoleh $2a+2b+2c-ab-bc-ca\leq 3\iff 4a+4b+4c-2ab-2bc-2ca\leq 6$. Tinjau bahwa

$$4a^2+4b^2+4c^2-2ab-2bc-2ca\leq 4a+4b+4c-2ab-2bc-2ca\leq 6$$

sehingga diperoleh $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2a^2+2b^2+2c^2\leq 6$. Kesamaan terjadi saat $(a,b,c)=(1,1,0),(1,1,1)$ dan permutasinya. □

Dari lemma di atas, kita punya

$$\begin{aligned}5a^2+5b^2+5c^2&\leq 6+2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2\\5a^2+5b^2+5c^2+2a^2\sqrt{6}+2b^2\sqrt{6}+2c^2\sqrt{6}&\leq 6+2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2+2a\sqrt{6}+2b\sqrt{6}+2c\sqrt{6}\\\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)&\leq\left(a+b+c+\sqrt{6}\right)^2\\\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}&\leq a+b+c+\sqrt{6}\\\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}&\leq\frac{a+b+c}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Kesamaan terjadi saat $(a,b,c)=(1,1,0),(1,1,1)$ dan permutasinya. ■